Научная статья
УДК 519.21
DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-2-5-25

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ЧАСТИЧНЫХ СУММ СКОЛЬЗЯЩИХ СРЕДНИХ, СФОРМИРОВАННЫХ ПО ГЕТЕРОГЕННЫМ ПРОЦЕССАМ

Николай Сергеевич Аркашов

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
630090, Новосибирск, Россия

nicky1978@mail.ru;n.s.arkashov@math.nsc.ru;
https://orcid.org/0000-0001-8098-377X

Аннотация

В работе исследуется класс процессов частичных сумм, построенных по последовательности наблюдений со структурой скользящих средних конечного порядка. Случайная составляющая этой последовательности формируется с помощью гетерогенного процесса в дискретном времени, а неслучайная — с помощью правильно меняющейся на бесконечности функции. Гетерогенный процесс в дискретном времени определяется как степенное преобразование частичных сумм некоторой стационарной последовательности. Изучается аппроксимация процессов упомянутого класса посредством процессов, определяемых как свертка степенного преобразования фрактального броуновского движения и степенной функции, при этом получены достаточные условия для C-сходимости в принципе инвариантности в форме Донскера.

Ключевые слова и фразы

принцип инвариантности, скользящее среднее, фрактальное броуновское движение, гетерогенный процесс, преобразование гауссовской последовательности.

Источник финансирования

Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН, проект FWNF-2024-0001.

Для цитирования

Аркашов Н. С. О предельных теоремах для процессов частичных сумм скользящих средних, сформированных по гетерогенным процессам // Математические труды, 2024, Т. 27, № 2, С. 5-25. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-2-5-25

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 2, С.5-25
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 2, pp. 5-25

ON LIMIT THEOREMS FOR PARTIAL SUM PROCESSES OF MOVING AVERAGES CONSTRUCTED ON THE BASIS OF HETEROGENEOUS PROCESSES

Nikolay S. Arkashov

Sobolev Institute of Mathematics,Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences
630090, Novosibirsk, Russia

nicky1978@mail.ru;n.s.arkashov@math.nsc.ru;
https://orcid.org/0000-0001-8098-377X

Abstract

A class of partial sum processes constructed on the basis of a sequence of observations having the structure of finite-order moving averages is studied. The random component of this sequence is formed using a heterogeneous process in discrete time, while the non-random component is formed using a regularly varying function at infinity. The discrete time heterogeneous process is defined as a power transform of partial sums of a certain stationary sequence. The approximation of processes of the mentioned class by processes defined as the convolution of a power transform of the fractional Brownian motion with a power function is studied. Sufficient conditions for C-convergence in the invariance principle in Donsker form are established.

Keywords

invariance principle, moving average, fractional Brownian motion, heterogeneous process, transform of Gaussian sequence.

Funding

The work was carried out with financial support from the program of fundamental scientific research of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, project FWNF-2024-0001.

For citation

Arkashov N. S. On limit theorems for partial sum processes of moving averages constructed on the basis of heterogeneous processes // Mat. Trudy, 2024, V. 27, no. 2, pp. 5-25. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-2-5-25

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 2, С. 5-25
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 2, pp. 5-25

§ 1. Введение

В настоящей работе исследуется класс процессов частичных сумм, построенных по последовательности скользящих средних конечного порядка (см., например, [1]). Эта последовательность является результатом свертки первой разностной производной гетерогенного процесса в дискретном времени и правильно меняющейся на бесконечности функции. Гетерогенный процесс в дискретном времени определяется как степенное преобразование частичных сумм некоторой стационарной последовательности с правильным поведением по времени дисперсии этих частичных сумм.

Основной целью работы является аппроксимация процессов упомянутого класса с помощью процессов, определяемых как свертка степенного преобразования фрактального броуновского движения и степенной функции. Следует отметить, что частный случай представленного класса рассматривается в работах [2–4], причем в [3, 4] этот класс процессов применяется для анализа выборки значений плотности плазмы. В этих работах последовательность скользящих средних определяется как результат свертки некоторой стационарной последовательности и степенной функции. Подчеркнем, что существенным отличием исследуемого класса настоящей работы является применение последовательности, определяемой гетерогенным процессом в дискретном времени, вместо стационарной последовательности. Такое усложнение позволяет расширить возможность применения такого класса к анализу экспериментальных данных.

Основным результатом работы являются предельные теоремы 1 и 2. Эти теоремы могут использоваться для построения статистического критерия проверки адекватности модели, реализуемой представленным классом процессов, по соответствию экспериментальным данным (см., например, [2]). Отметим также предложения 3 и 4, в которых устанавливается правильное поведение по времени дисперсии исследуемых процессов частичных сумм, причем соответствующий показатель степенного изменения может принимать (при определенных ниже условиях) значения в диапазоне $(0, +\infty)$. Таким образом, можно говорить о том, что исследуемый класс является перспективной моделью для реализации так называемой аномальной диффузии (см., например, [5]).

Гетерогенные процессы в дискретном времени в настоящей работе строится с помощью двух типов стационарных последовательностей. Первый тип формируется с помощью двухсторонних скользящих средних из последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин, второй тип строится с помощью нелинейного преобразования стационарной гауссовской последовательности. Отметим, что на втором типе основывается метод обратной функции распределения моделирования

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 2, С. 5-25
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 2, pp. 5-25

негауссовских последовательностей (см. ниже замечание 1). Отметим также, что эти два типа последовательностей являются конструктивно заданными последовательностями стационарно связанных случайных величин, форма зависимости которых может быть достаточно сильной (см., например, [6, 7]).

§ 2. Формулировка основных результатов

2.1. Предварительные обозначения и определения. Пусть $\{X_j,\ j = 1, 2, \dots\}$ — стационарная (в узком смысле) последовательность случайных величин, имеющих структуру двусторонних скользящих средних:

$$X_j := \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j-k}\xi_k, \tag{1}$$

где $\{\xi_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевыми средними и единичными дисперсиями, $\{a_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ — неслучайная, квадратично суммируемая последовательность действительных чисел.

Через F обозначим некоторую функцию распределения. Будем считать, что F задает распределение с *нулевым средним и единичной дисперсией*. Пусть $\{z_j\}$ — стационарная последовательность стандартных нормальных величин с *ковариационной функцией* $\rho = \rho(j)$. Наряду с $\{X_j\}$ будем рассматривать последовательность

$$Y_j := F^{-1}(\Phi_{0,1}(z_j)),\ j = 1, 2, \dots, \tag{2}$$

где $\Phi_{0,1}$ — функция распределения стандартного нормального закона, F^{-1} — *квантильное преобразование* функции F, определяемое следующим образом: $F^{-1}(t) := \inf\{x : F(x) \geq t\}$. Очевидно, что $\{Y_j,\ j = 1, 2, \dots\}$ — стационарная (в широком смысле) последовательность одинаково распределенных случайных величин (с функцией распределения F).

Замечание 1. Последовательность $\{Y_j\}$ лежит в основе так называемого *метода обратной функции распределения* моделирования негауссовских последовательностей (см. [9, 9, 10]). Дадим краткое описание этого метода. Рассмотрим стационарную (в широком смысле) последовательность $\{W_j\}$ одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения F и ковариационной функцией $\lambda(j)$. Будем говорить, что $\{W_j\}$ моделируется методом обратной функции распределения, если существует $\{z_j\}$ (см. (2)), что $\mathbf{E}(Y_1Y_{j+1}) = \gamma(j)$ при всех $j = 1, 2, \dots$.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 2, С. 5-25
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 2, pp. 5-25

Введем обозначения

$$S_n := \sum_{j=1}^{n} X_j,\ n \geq 1,\ S_0 = 0,$$

$$Z_n := \sum_{j=1}^{n} Y_j,\ n \geq 1,\ Z_0 = 0.$$

В дальнейшем будем считать, что $\mathbf{D}S_n$ и $\rho(j)$ $(j = 1, 2, \dots)$ являются правильно меняющимися функциями, имеющими следующие представления:

$$\mathbf{D}S_n = h^2(n)n^{2H}, \tag{3}$$

где h — медленно меняющаяся на $+\infty$ функция (см., например, [11]), $H \in (0, 1)$;

$$\rho(j) = b^2(j)j^{2H-2}, \tag{4}$$

где b — медленно меняющаяся на $+\infty$ функция и $H \in (1/2, 1)$.

В предложении 1 мы покажем, что если для ковариационной функции $\{X_j\}$ имеет место представление вида (4), то $\mathbf{D}S_n$ удовлетворяет условию (3). Далее в следующем предложении 2 доказывается, что из условия (4) следует, что для $\mathbf{D}Z_n$ имеет место представление вида (3).

Предложение 1. *Пусть при всех* $j = 1, 2, \dots$ *ковариационная функция* $\lambda(j)$ *последовательности* $\{X_j\}$ *удовлетворяет соотношению*: $\lambda(j) := b^2(j)j^{2H-2}$, *где* b *— медленно меняющаяся на* $+\infty$ *функция и* $H \in (1/2, 1)$. *Тогда*

$$\mathbf{D}S_n \sim b^2(n)H^{-1}(2H-1)^{-1}n^{2H},\ n \to +\infty.$$

Через $\varphi_{0,1}$ будем обозначать плотность распределения стандартного нормального закона.

Предложение 2. *Пусть выполняется* (4). *Тогда*

$$\mathbf{D}Z_n \sim g^2(n)n^{2H},\ n \to +\infty, \tag{5}$$

где $g^2(n) := c^2 b^2(n)H^{-1}(2H-1)^{-1}$, $c := \int_{-\infty}^{\infty} xF^{-1}(\Phi_{0,1}(x))\varphi_{0,1}(x)\,dx$.

Заметим, что в [10, теорема 1] установлено, что $c > 0$.

Из этих двух предложений, в частности, вытекает, что $\{X_j\}$ в настоящей работе удовлетворяет менее ограничительным условиям, чем $\{Y_j\}$.

Через $B_H(t)$ обозначим фрактальное броуновское движение с параметром Хёрста H (см. [12, 13]), т. е. центрированный гауссовский процесс с ковариационной функцией

$$R(t,s) := \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right), \tag{6}$$

где $H \in (0,1)$ (случай $H = 1/2$ соответствует стандартному винеровскому процессу).

Определим функцию $p_d(t) := |t|^d \mathrm{sgn}(t),\ t \in \mathbb{R}$, где $\mathrm{sgn}(\cdot)$ — функция знака числа, d — неотрицательная константа (считаем, что $0^0 := 0$).

Пусть δ — некоторый положительный параметр. Определим последовательности

$$\{p_\delta(S_i),\ i = 1,2,\dots\} \text{ и } \{p_\delta(Z_i)\ i = 1,2,\dots\}.$$

В [14] такие последовательности называются *гетерогенными процессами* в дискретном времени.

Замечание 2. В работах [15–17] гетерогенный диффузионный процесс определяется как решение уравнения Ланжевена специального вида, в этих же работах устанавливается, что упомянутое решение представляется в виде степенного преобразования фрактального броуновского движения, а именно: $p_\delta(B_H(t))$.

По $\{p_\delta(S_i)\}$ и $\{p_\delta(Z_i)\}$ построим следующие шумовые последовательности:

$$K_i := (p_\delta(S_i) - p_\delta(S_{i-1})),\ i \geq 1,\ K_0 := 0 \tag{7}$$

и

$$L_i := (p_\delta(Z_i) - p_\delta(Z_{i-1})),\ i \geq 1,\ L_0 := 0. \tag{8}$$

Заметим, что параметр δ в (7) и (8) играет роль параметра неоднородности (в случае $\delta = 1$, очевидно, имеем стационарную последовательность).

Через M обозначим некоторую неубывающую на неотрицательной полуоси функцию, такую что $M(0) = 0$ и $M(1) = 1$. По $\{K_i\}$, $\{L_i\}$ и M построим следующие последовательности наблюдений, имеющих структуру *скользящих средних конечного порядка*:

$$\kappa_j := \sum_{i=0}^{j} K_{j-i} \Delta M(i),\ j = 0,1,\dots \tag{9}$$

и

$$\lambda_j := \sum_{i=0}^{j} L_{j-i}\Delta M(i),\ j = 0, 1, \ldots, \tag{10}$$

где $\Delta M(i) := M(i+1) - M(i)$. Заметим, что правая часть (9) и (10) является *сверткой* $\{K_i,\ i = 0, 1, \ldots\}$, $\{L_i,\ i = 0, 1, \ldots\}$ с M соответственно (см., например, [1]). Функцию M будем называть *функцией памяти* (см., например, [18, 19], где исследуются физические процессы с памятью).

Через $\mathcal{R}_\nu$ обозначим *класс правильно меняющихся функций с показателем* $\nu \geq 0$, определенных на промежутке $[0, +\infty)$, имеющих следующее представление: $l(t)p_\nu(t)$, $l(t)$ — медленно меняющаяся на $+\infty$, неотрицательная и неубывающая функция на $[0, +\infty)$.

В дальнейшем функции памяти будут рассматриваться из этого класса.

Рассмотрим процессы частичных сумм, построенные по $\{\kappa_j\}$ и $\{\lambda_j\}$ соответственно

$$Q_n := \sum_{j=0}^{n} \kappa_j,\ n = 0, 1, \ldots \tag{11}$$

и

$$R_n := \sum_{j=0}^{n} \lambda_j,\ n = 0, 1, \ldots. \tag{12}$$

Отметим, что процессы частичных сумм $\{Q_n\}$ и $\{R_n\}$ являются *основными объектами* исследования настоящей работы.

В дальнейшем для действительного числа x через $[x]$ будем обозначать наибольшее целое число не превосходящее x.

2.2. Предельные теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполняется условие* (3), $M \in \mathcal{R}_\nu$ *и* $\mathbf{E}|\xi_1|^\alpha < \infty$ *для некоторого* α, *такого что* $\alpha \geq 2$ *и* $\alpha H > 1$. *Пусть, кроме того,* $\delta \geq 1$. *Тогда при* $n \to \infty$ *имеет место* C*-сходимость в* $D[0,1]$ *процессов* $\frac{Q_{[nt]}}{M(n)(h(n)n^H)^\delta}$ *к* $\int_0^t p_\delta(B_H(t-s))\,dp_\nu(s)$.

Напомним, что под C-сходимостью в $D[0,1]$ понимается слабая сходимость распределений измеримых (в топологии А. В. Скорохода) функционалов на $D[0,1]$, непрерывных в равномерной топологии в точках пространства $C[0,1]$ (см., например, [20]).

Замечание 3. Заключение теоремы 1 получено в рамках условия $\delta \geq 1$. В случае $\delta \in (0,1)$, $M = p_0$ (единичный скачок в нуле), а также при выполнении условия (3) легко получить конечномерную аппроксимацию для $\frac{Q_{[nt]}}{M(n)(h(n)n^H)^\delta}$. Действительно, в этом случае $\{Q_n\}$ совпадает с $\{p_\delta(S_n)\}$. Кроме того, выполняется сходимость конечномерных распределений процессов $S_{[nt]}/(h(n)n^H)$ к конечномерному распределению $B_H(t)$ при $n \to +\infty$ (см. [21, лемма 9]). Откуда вытекает сходимость конечномерных распределений процессов $p_\delta(S_{[nt]})/(h(n)n^H)^\delta$ к соответствующему конечномерному распределению $p_\delta(B_H(t))$.

В следующих предложениях 3 и 4 в качестве функции памяти используется степенная функция.

Предложение 3. *Пусть выполняется* (3) *и* $M = p_\nu$. *Пусть, кроме того, выполняется одно из следующих условий*

(i) $\delta \leq 1$;

(ii) $\delta > 1$ *и существует* $\psi > 2\delta$, *такое что* $\mathbf{E}|\xi_0|^\psi < +\infty$.

Тогда выполняется соотношение:

$$\mathbf{D}Q_n \sim \beta^2 M^2(n)(h^2(n)n^{2H})^\delta, \quad n \to +\infty, \tag{13}$$

где $\beta^2 := \mathbf{D}(\int_0^1 p_\delta(B_H(1-t))\,dp_\nu(t))$.

Теорема 2. *Пусть выполняется* (4), $M \in \mathcal{R}_\nu$. *Пусть, кроме того,* $\delta \geq 1$. *Тогда при* $n \to \infty$ *имеет место* C*-сходимость в* $D[0,1]$ *процессов* $\frac{R_{[nt]}}{M(n)(g(n)n^H)^\delta}$ *к* $\int_0^t p_\delta(B_H(t-s))\,dp_\nu(s)$, *где* $g^2(n) = c^2b^2(n)H^{-1}(2H-1)^{-1}$ *и* $c = \int_{-\infty}^{\infty} xF^{-1}(\Phi_{0,1}(x))\varphi_{0,1}(x)\,dx$.

Замечание 4. *Пусть* $\delta \in (0,1)$, $M = p_0$ *и выполняется (4). В рамках этих условий легко установить конечномерную аппроксимацию для* $\frac{R_{[nt]}}{M(n)(g(n)n^H)^\delta}$. *Действительно, в этом случае* $\{R_n\}$ *совпадает с* $\{p_\delta(Z_n)\}$. *Кроме того, выполняется сходимость конечномерных распределений процессов* $Z_{[nt]}/(g(n)n^H)$ *к конечномерному распределению* $B_H(t)$ *при* $n \to +\infty$ *(см. лемму 5 в разделе 3.6). Стало быть, имеет место сходимость конечномерных распределений процессов* $p_\delta(Z_{[nt]})/(g(n)n^H)^\delta$ *к соответствующему конечномерному распределению* $p_\delta(B_H(t))$.

Предложение 4. *Пусть имеет место* (4), $M = p_\nu$. *Пусть, кроме того,* $\delta \leq 1$. *Тогда выполняется соотношение*:

$$\mathbf{D}R_n \sim \beta^2 M^2(n)(g^2(n)n^{2H})^\delta, \quad n \to +\infty, \tag{14}$$

где $\beta^2 = \mathbf{D}(\int_0^1 p_\delta(B_H(1-t))\,dp_\nu(t))$, $g^2(n) = c^2b^2(n)H^{-1}(2H-1)^{-1}$ *и* $c = \int_{-\infty}^{\infty} xF^{-1}(\Phi_{0,1}(x))\varphi_{0,1}(x)\,dx$.

Подчеркнем, что в рамках данной работы асимптотическое поведение дисперсии R_n (см. (14)) удается установить только для случая $\delta \le 1$. Ключевую роль в доказательстве соотношения (13) (аналога (14)) играет моментное неравенство (17) для S_n (см. лемму 2 в разделе 3.4). Однако, автору настоящей работы неизвестно аналогичное неравенство для Z_n. Отметим, что такое неравенство позволит получить (14) при $\delta > 1$.

§ 3. Доказательство утверждений

3.1. Доказательство предложения 1. Рассмотрим гауссовский аналог $\{X_j\}$, когда случайные величины ξ_k в (1) – стандартные нормальные, при этом величины $\lambda(j)$ и $\mathbf{D}S_n$ не изменятся. Применяя лемму 3.1 из [7] (в этой лемме нужно взять $m = 1$ и $D = 2 - 2H$), получаем, что

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda(i-j) \sim b^2(n)H^{-1}(2H-1)^{-1}n^{2H},\ n \to +\infty.$$

Из этого соотношения, используя лемму 5.1 из [7], выводим, что для S_n/d_n, где $d_n^2 \sim b^2(n)H^{-1}(2H-1)^{-1}n^{2H}$, выполняется слабая сходимость к $B_H(1)$ при $n \to +\infty$. Далее, заметим, что случайная величина $S_n/\sqrt{\mathbf{D}S_n}$ при всех n имеет стандартное нормальное распределение. В итоге получаем эквивалентность нормировочных коэффициентов S_n:

$$\mathbf{D}S_n \sim b^2(n)H^{-1}(2H-1)^{-1}n^{2H},\ n \to \infty.$$

Предложение доказано. □

3.2. Предварительные сведения к доказательству теоремы 1. Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся следующие обозначения и утверждения. Прежде всего, отметим утверждение из [21].

Предложение 5. *Пусть выполняется условие* (3) *и* $\mathbf{E}|\xi_1|^\alpha < \infty$ *для некоторого* α*, такого что* $\alpha \ge 2$ *и* $\alpha H > 1$*. Тогда при* $n \to \infty$ *имеет место* C*-сходимость в* $D[0,1]$ *процессов* $S_{[nt]}/(h(n)n^H)$ *к* $B_H(t)$*.*

Для того чтобы сформулировать следующее утверждение, нам потребуются такие обозначения. Пусть $y_{0,n} := 0, y_{1,n}, \ldots, y_{n,n}$, $n = 1, 2, \ldots$ — некоторая схема серий случайных величин. Положим

$$s_n(y,t) := \sum_{i=0}^{[nt]} y_{i,n}, \quad t \in [0,\, 1], \quad n = 1,\, 2,\, \ldots. \tag{15}$$

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 2, С. 5-25
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 2, pp. 5-25

Через $\langle M, y\rangle$ обозначим схему серий, построенную по функции памяти M и схеме серий $\{y_{k,n}\}$

$$\langle M, y\rangle(k,n) := \sum_{j=0}^{k} y_{k-j,n} \frac{\Delta M(j)}{M(n)},\ k = 0, 1, \ldots, n,\ n = 1,\ 2,\ \ldots.$$

По схеме серий $\langle M, y\rangle$ определим (используя (15)) процессы $s_n(\cdot, t)$:

$$s_n(\langle M, y\rangle, t) = \sum_{k=0}^{[nt]} \langle M, y\rangle(k,n),\ t \in [0,1],\ n = 1, 2, \ldots.$$

Для $s_n(\langle M, y\rangle, t)$ выполняется следующее предложение (см. [22, предложение 1]).

Предложение 6. *Пусть $M \in \mathcal{R}_\nu$ и, кроме того, при $n \to \infty$ имеет место C-сходимость в $D[0,1]$ процессов $s_n(y,t)$ к $B(t)$, где $B(\cdot)$ — случайный элемент из $C[0,1]$. Тогда при $n \to \infty$ имеет место C-сходимость в $D[0,1]$ процессов $s_n(\langle M, y\rangle, t)$ к $\int_0^t B(t-s)\, dp_\nu(s)$.*

3.3. Доказательство теоремы 1. Определим $y = \{y_{k,n}\}$ следующим образом:

$$y_{k,n} := p_\delta\Big(\frac{S_k}{h(n)n^H}\Big) - p_\delta\Big(\frac{S_{k-1}}{h(n)n^H}\Big),\ k = 1, 2, \ldots, n,\ y_{0,n} := 0,\ n = 1, 2, \ldots.$$

В этом случае $s_n(y,t) = p_\delta(\frac{S_{[nt]}}{h(n)n^H})$ (см. (15)).

Рассмотрим пространство $D[0,1]$ с топологией Скорохода (см., например, [23]). Определим отображение $\mathcal{P}_\delta : D[0,1] \to D[0,1]$ следующим образом: $\mathcal{P}_\delta(x(\cdot)) := p_\delta(x(\cdot))$.

Для любых $s, t \in \mathbb{R}$ выполняется очевидное неравенство:

$$|p_\delta(t) - p_\delta(s)| \le \delta \max(|t|^{\delta-1},\ |s|^{\delta-1})|t-s|. \qquad (16)$$

Покажем, что отображение $\mathcal{P}_\delta$ является непрерывным. Пусть последовательность элементов $\{x_n\}$ пространства $D[0,1]$ сходится к пределу x в топологии Скорохода. Это означает, что существуют функции λ_n (из класса строго возрастающих, непрерывных отображений отрезка $[0,1]$ на себя), такие что равномерно по t (см. [23, §14])

$$\lim_{n\to\infty} x_n(\lambda_n(t)) = x(t)$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n(t) = t.$$

В частности, отсюда следует, что $\sup_n \sup_t |x_n(t)| < +\infty$. Тогда из (16) вытекает, что равномерно по t

$$\lim_{n\to\infty} p_\delta(x_n(\lambda_n(t))) = p_\delta(x(t)).$$

Стало быть, $\mathcal{P}_\delta(x_n)$ сходится к $\mathcal{P}_\delta(x)$ в топологии Скорохода. В таком случае из предложения 5 и [23, теорема 5.1] вытекает, что для $s_n(y,t)$ при $n \to \infty$ выполняется сходимость в $D[0,1]$ (с топологией Скорохода) к $p_\delta(B_H(t))$. Поскольку предельный процесс $p_\delta(B_H(t))$ является случайным элементом из $C[0,1]$, то можно говорить о C-сходимости процессов $s_n(y,t)$ к $p_\delta(B_H(t))$ при $n \to \infty$ (см., например, [23, §18]). Далее, используя предложение 6, выводим C-сходимость в $D[0,1]$ процессов $s_n(\langle M, y\rangle, t)$ к $\int_0^t p_\delta(B_H(t-s))\, dp_\nu(s)$. Осталось заметить, что $s_n(\langle M, y\rangle, t)$ совпадает с $\frac{R_{[nt]}}{M(n)(h(n)n^H)^\delta}$. Теорема 1 доказана.

$\square$

3.4. Предварительные сведения к доказательству предложения 3. Для доказательства предложения 3 мы будем применять следующие обозначения и утверждения. Напомним, что $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ при $n \geq 1$, $S_0 = 0$, где $\{X_j\}$ — последовательность случайных величин со структурой двухсторонних скользящих средних (см. (1)). Заметим, что S_n можно представить в виде

$$S_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (a_{-k+1} + \cdots + a_{-k+n})\xi_k.$$

Обозначим $A(n,k) := a_{-k+1} + \cdots + a_{-k+n}$. Стало быть, $S_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} A(n,k)\xi_k$.

Нам понадобится следующий общий результат (см., например, [23]).

Лемма 1. *Пусть $\{\zeta_n\}$ — последовательность случайных величин, для которой при некотором положительном ε выполняется неравенство*:

$$\sup_n \mathbf{E}|\zeta_n|^{1+\varepsilon} < +\infty.$$

Тогда $\{\zeta_n\}$ — равномерно интегрируемая последовательность.

Кроме того, мы будем использовать следующую лемму (см. [14, неравенство A4]).

Лемма 2. *Пусть $q \geq 1$. Если $\mathbf{E}|\xi_0|^{2q} < +\infty$, тогда*

$$\mathbf{E}|S_n|^{2q} \leq c(q)(\mathbf{E}|\xi_0|^{2q} + 1)(\mathbf{D}S_n)^q, \tag{17}$$

где $c(q)$ — константа, зависящая только от q.

Установим справедливость следующей леммы.

Лемма 3. *Пусть w — медленно меняющаяся функция, определенная на интервале $[1,+\infty)$, ε – произвольное положительное число. Тогда последовательность*

$$\left\{\frac{\max_{1\le k\le n} w(k)k^{\varepsilon}}{w(n)n^{\varepsilon}}\right\}_{n\ge 1}$$

является ограниченной.

Доказательство. Используя утверждение 4 из [11, раздел 1.5], получаем, что существует B, такое что выполняется соотношение: $\frac{\sup_{B\le x\le n} w(x)x^{\varepsilon}}{w(n)n^{\varepsilon}} \to 1$ при $n\to+\infty$, откуда сразу следует утверждение леммы.

□

3.5. Доказательство предложения 3. Обозначим $A_n := \sum_{i=1}^{n} K_i$ при $n\ge 1$, $A_0 := 0$, где, напомним, $K_i = p_\delta(S_i) - p_\delta(S_{i-1})$, $i\ge 1$, $K_0 = 0$. Кроме того, напомним соотношение (11) для Q_n

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} K_{k-i}\Delta p_\nu(i),\ n = 0,1,\ldots.$$

Меняя порядок суммирования в правой части этого равенства, представим Q_n в виде $\sum_{i=0}^{n} A_{n-i}\Delta p_\nu(i)$. Из этого представления сразу следует, что $Q_n = \int_0^n A_{n-[u]}dp_\nu(u)$. Стало быть, $Q_n = \int_0^n p_\delta(S_{n-[u]})dp_\nu(u)$. Сделав замену $u = ns$ в этом интеграле, получим $Q_n = n^{\nu}\int_0^1 p_\delta(S_{n-[ns]})dp_\nu(s)$. Откуда выводим

$$\frac{\mathbf{E}Q_n^2}{n^{2\nu}(h^2(n)n^{2H})^{\delta}} = \int_0^1\int_0^1 \mathbf{E}p_\delta\left(\frac{S_{n-[nt]}}{h(n)n^H}\right)p_\delta\left(\frac{S_{n-[ns]}}{h(n)n^H}\right)dp_\nu(t)dp_\nu(s). \quad (18)$$

Имеет место сходимость при $n\to\infty$ конечномерных распределений процессов $\frac{S_{[nt]}}{h(n)n^H}$, $t\in[0,1]$, где $H\in(0,1)$ и $\sigma>0$, к конечномерному распределению $B_H(t)$, $t\in[0,1]$ (см. [21, лемма 9]). Поэтому выполняется сходимость по распределению:

$$\left(\frac{S_{n-[nt]}}{h(n)n^H}, \frac{S_{n-[ns]}}{h(n)n^H}\right) \xrightarrow{d} (B_H(1-t),\, B_H(1-s)).$$

Далее, поскольку $p_\delta(u)p_\delta(v)$ — непрерывная функция двух переменных, поэтому (см., например, [23])

$$p_\delta\left(\frac{S_{n-[nt]}}{h(n)n^H}\right)p_\delta\left(\frac{S_{n-[ns]}}{h(n)n^H}\right) \xrightarrow{d} p_\delta(B_H(1-t))p_\delta(B_H(1-s)). \quad (19)$$

Прежде рассмотрим случай $\delta < 1$. Установим для $\{\zeta_n\}$, где $\zeta_n := p_\delta\left(\frac{S_{n-[nt]}}{h(n)n^H}\right) p_\delta\left(\frac{S_{n-[ns]}}{h(n)n^H}\right)$, свойство равномерной интегрируемости. Будем использовать лемму 1. Определим функцию $G(t) := t^{1/\delta}$. Рассмотрим

$$G(|\zeta_n|) = \frac{|S_{n-[nt]}|}{h(n)n^H}\frac{|S_{n-[ns]}|}{h(n)n^H}.$$

Используя неравенство Коши-Буняковского и условие (3), получаем

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}G(|\zeta_n|) \le \sqrt{\frac{\mathbf{E}S^2_{n-[nt]}}{h^2(n)n^{2H}}\frac{\mathbf{E}S^2_{n-[ns]}}{h^2(n)n^{2H}}} \\ &= \sqrt{\frac{h^2(n-[nt])(n-[nt])^{2H}}{h^2(n)n^{2H}}}\sqrt{\frac{h^2(n-[ns])(n-[ns])^{2H}}{h^2(n)n^{2H}}}. \end{aligned} \tag{20}$$

Применяя лемму 3, из (20) выводим неравенство: $\sup_{n\ge1}\mathbf{E}G(|\zeta_n|) < +\infty$, откуда вытекает равномерная интегрируемость $\{\zeta_n\}$.

Стало быть, с учетом (19)

$$\mathbf{E}p_\delta\left(\frac{S_{n-[nt]}}{h(n)n^H}\right) p_\delta\left(\frac{S_{n-[ns]}}{h(n)n^H}\right) \to \mathbf{E}p_\delta(B_H(1-t))p_\delta(B_H(1-s)),\ n\to+\infty. \tag{21}$$

Рассмотрим теперь (18). Определим $\{w_n(\cdot,\cdot)\}$ следующим образом:

$$w_n(t,s) := \mathbf{E}p_\delta\left(\frac{S_{n-[nt]}}{h(n)n^H}\right) p_\delta\left(\frac{S_{n-[ns]}}{h(n)n^H}\right).$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского и неравенство Ляпунова, получаем

$$w_n^2(t,s) \le \mathbf{E}\left|\frac{S_{n-[nt]}}{h(n)n^H}\right|^{2\delta}\mathbf{E}\left|\frac{S_{n-[ns]}}{h(n)n^H}\right|^{2\delta} \le \left(\frac{\mathbf{E}S^2_{n-[nt]}}{h^2(n)n^{2H}}\right)^\delta\left(\frac{\mathbf{E}S^2_{n-[ns]}}{h^2(n)n^{2H}}\right)^\delta. \tag{22}$$

Следовательно, учитывая лемму 3, выводим неравенство:

$$\sup_{n\ge1}\sup_{t,s\in[0,1]}|w_n(t,s)| < +\infty.$$

Мы получаем, что $\{w_n(\cdot,\cdot)\}$ обладает интегрируемой мажорантой. Поэтому из (21) вытекает

$$\begin{aligned} &\frac{\mathbf{E}Q_n^2}{n^{2\nu}(h^2(n)n^{2H})^\delta} = \int_0^1\int_0^1 \mathbf{E}p_\delta\left(\frac{S_{n-[nt]}}{h(n)n^H}\right) p_\delta\left(\frac{S_{n-[ns]}}{h(n)n^H}\right) dp_\nu(t)dp_\nu(s) \\ &\to \int_0^1\int_0^1 \mathbf{E}p_\delta(B_H(1-t))p_\delta(B_H(1-s))\,dp_\nu(t)dp_\nu(s),\ n\to+\infty. \end{aligned} \tag{23}$$

Далее заметим, что выполняется очевидное равенство:

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 \mathbf{E}p_\delta(B_H(1-t))p_\delta(B_H(1-s))\,dp_\nu(t)dp_\nu(s)\\ =\mathbf{D}(\int_0^1 p_\delta(B_H(1-t))\,dp_\nu(t)).\end{aligned}\tag{24}$$

В случае $\delta=1$ утверждение предложения сразу следует из [22, следствие 1].

Пусть теперь $\delta>1$. Рассмотрим $\{\zeta_n\}$, $\zeta_n := p_\delta\left(\frac{S_{n-[nt]}}{h(n)n^H}\right)p_\delta\left(\frac{S_{n-[ns]}}{h(n)n^H}\right)$. Докажем равномерную интегрируемость этой последовательности. Определим функцию $G(t):=t^\theta$, где $\theta=\frac{\psi}{2\delta}$ (показатель ψ такой, что $\psi>2\delta$ и $\mathbf{E}|\xi_0|^\psi<+\infty$, см. условие теоремы), тогда

$$G(|\zeta_n|)=\frac{|S_{n-[nt]}|^{\theta\delta}}{h^{\theta\delta}(n)n^{\theta\delta H}}\frac{|S_{n-[ns]}|^{\theta\delta}}{h^{\theta\delta}(n)n^{\theta\delta H}}.$$

Используя последовательно неравенство Коши-Буняковского и неравенство (17) (где $q=\theta\delta$), получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}G(|\zeta_n|)&\le\sqrt{\frac{\mathbf{E}S^{2\theta\delta}_{n-[nt]}}{h^{2\theta\delta}(n)n^{2\theta\delta H}}\frac{\mathbf{E}S^{2\theta\delta}_{n-[ns]}}{h^{2\theta\delta}(n)n^{2\theta\delta H}}}\\ &\le K\sqrt{\left(\frac{\mathbf{E}S^2_{n-[nt]}}{h^2(n)n^{2H}}\right)^{\theta\delta}\left(\frac{\mathbf{E}S^2_{n-[ns]}}{h^2(n)n^{2H}}\right)^{\theta\delta}},\end{aligned}\tag{25}$$

где K — константа, зависящая от $\theta\delta$ и распределения ξ_0. Из условия (3), леммы 3 и (25) сразу следует, что $\sup_{n\ge1}\mathbf{E}G(|z_n|)<+\infty$. Из этого неравенства вытекает равномерная интегрируемость $\{\zeta_n\}$ (см. лемму 1). В соответствии с (19) имеем сходимость (21) (для случая $\delta>1$), напомним это соотношение

$$\mathbf{E}p_\delta\left(\frac{S_{n-[nt]}}{h(n)n^H}\right)p_\delta\left(\frac{S_{n-[ns]}}{h(n)n^H}\right)\to\mathbf{E}p_\delta(B_H(1-t))p_\delta(B_H(1-s)),\ n\to+\infty.\tag{26}$$

Рассмотрим (18) и $\{w_n(\cdot,\cdot)\}$, где $w_n(t,s):=\mathbf{E}p_\delta\left(\frac{S_{n-[nt]}}{h(n)n^H}\right)p_\delta\left(\frac{S_{n-[ns]}}{h(n)n^H}\right)$. Используя последовательно неравенство Коши-Буняковского и неравенство (17), получаем

$$\begin{aligned}w_n^2(t,s)&\le\mathbf{E}\left|\frac{S_{n-[nt]}}{h(n)n^H}\right|^{2\delta}\mathbf{E}\left|\frac{S_{n-[ns]}}{h(n)n^H}\right|^{2\delta}\\ &\le K\left(\frac{\mathbf{E}S^2_{n-[nt]}}{h^2(n)n^{2H}}\right)^{\delta}\left(\frac{\mathbf{E}S^2_{n-[ns]}}{h^2(n)n^{2H}}\right)^{\delta},\end{aligned}\tag{27}$$

где K — константа, зависящая от δ и распределения ξ_0. Далее, учитывая (3) и лемму 3, выводим соотношение: $\sup_{n\geq 1}\sup_{t,s\in[0,1]}|w_n(t,s)|<+\infty$. Стало быть, $\{w_n(\cdot,\cdot)\}$ обладает интегрируемой мажорантой. Поэтому из (26) вытекает сходимость (23) (для случая $\delta>1$).

Покажем, что при всех $\delta>0$ при $n\to+\infty$ имеет место соотношение

$$\frac{\mathbf{E}Q_n}{n^{\nu}(h(n)n^H)^{\delta}}\to 0. \tag{28}$$

Заметим, что в случае $\delta=1$ соотношение (28) выполняется очевидным образом. Пусть $\delta\neq 1$. Имеем

$$\frac{\mathbf{E}Q_n}{n^{\nu}(h(n)n^H)^{\delta}}=\int_0^1 \mathbf{E}p_{\delta}\left(\frac{S_{n-[nt]}}{h(n)n^H}\right)dp_{\nu}(t). \tag{29}$$

Далее, проводя для (29) рассуждения аналогичные тем, что приведены выше для (18), получаем

$$\frac{\mathbf{E}Q_n}{n^{\nu}(h(n)n^H)^{\delta}}\to\int_0^1 \mathbf{E}p_{\delta}(B_H(1-t))\,dp_{\nu}(t),\ n\to+\infty.$$

Учитывая, что $\mathbf{E}p_{\delta}(B_H(1-t))=0$, выводим (28).

В итоге при любом $\delta>0$ имеют место соотношения (23), (24) и (28), из которых следует заключение предложения.

$\square$

3.6. Предварительные сведения к доказательству предложений 2, 4 и теоремы 2. Определим случайные величины Z_1, Z_2:

$$Z_1:=F^{-1}(\Phi_{0,1}(z)),\quad Z_2:=F^{-1}(\Phi_{0,1}(w)),$$

где (z,w) — гауссовский вектор со стандартными нормальными компонентами и коэффициентом корреляции r. По Z_1 и Z_2 построим функцию

$$R(r):=\mathbf{E}(Z_1Z_2).$$

Далее напомним, что $c=\int_{-\infty}^{\infty}xF^{-1}(\Phi_{0,1}(x))\varphi_{0,1}(x)\,dx$. Нам понадобится следующее утверждение (см. теорему 1 в [10]).

Лемма 4. *Выполняется неравенство $c>0$, и имеет место соотношение*

$$R(r)\sim c^2r,\ r\to 0.$$

В основе доказательства предложения 2 и теоремы 2 лежит следующее утверждение из [10, теорема 2].

Лемма 5. *Пусть при любом* $j \geq 1$ *ковариационная функция* $\{Y_j\}$ *удовлетворяет соотношению:* $\gamma(j) := L(j)j^{2H-2}$, *где* L *— медленно меняющаяся на* $+\infty$ *функция и* $H \in (1/2, 1)$. *Тогда*

$$\mathbf{D}Z_n \sim L(n)H^{-1}(2H-1)^{-1}n^{2H}, \ n \to \infty \tag{30}$$

и, кроме того, для процессов $\frac{Z_{[nt]}}{\sqrt{L(n)H^{-1}(2H-1)^{-1}n^H}}$ *выполняется* C*-сходимость в* $D[0,1]$ *к* $B_H(t)$ *при* $n \to \infty$.

3.7. Доказательство предложения 2 **и теоремы** 2. Напомним представление ковариационной функции $\{z_j\}$: $\rho(j) = b^2(j)j^{2H-2}$, где b — медленно меняющаяся на $+\infty$ функция. Из леммы 4 следует, что $\gamma(j) \sim c^2b^2(j)j^{2H-2}$, $j \to +\infty$. Поэтому выполняется условие леммы 5 и, стало быть, выполняется соотношение (30), откуда сразу следует заключение предложения 2.

Далее, используя сходимость, доказанную в лемме 5, мы проводим рассуждения аналогичные тем, что проводились при доказательстве теоремы 1 (где ключевую роль играет предложение 6). В итоге мы получаем заключение теоремы 2. □

3.8. Доказательство предложения 4. Прежде всего рассмотрим случай $\delta = 1$. Проводя для R_n (см. (12)) рассуждения, аналогичные тем, что проведены для Q_n в доказательстве предложения 3 (см. соотношения, приводящие к (18)), получаем

$$\frac{\mathbf{E}R_n^2}{n^{2\nu}g^2(n)n^{2H}} = \int_0^1\int_0^1 \mathbf{E}\left(\frac{Z_{n-[nt]}}{g(n)n^H}\frac{Z_{n-[ns]}}{g(n)n^H}\right)dp_\nu(t)dp_\nu(s). \tag{31}$$

Для $s \leq t$ выводим

$$2\mathbf{E}\left(\frac{Z_{n-[nt]}}{g(n)n^H}\frac{Z_{n-[ns]}}{g(n)n^H}\right) = \frac{\mathbf{E}Z^2_{n-[nt]}}{g^2(n)n^{2H}} + \frac{\mathbf{E}Z^2_{n-[ns]}}{g^2(n)n^{2H}} - \frac{\mathbf{E}(\sum_{j=n-[nt]+1}^{n-[ns]}Y_j)^2}{g^2(n)n^{2H}}.$$

Откуда, учитывая стационарность $\{Y_j\}$, имеем

$$2\mathbf{E}\left(\frac{Z_{n-[nt]}}{g(n)n^H}\frac{Z_{n-[ns]}}{g(n)n^H}\right) = \frac{\mathbf{E}Z^2_{n-[nt]}}{g^2(n)n^{2H}} + \frac{\mathbf{E}Z^2_{n-[ns]}}{g^2(n)n^{2H}} - \frac{\mathbf{E}Z^2_{[nt]-[ns]}}{g^2(n)n^{2H}}.$$

Используя (5), выводим

$$2\mathbf{E}\left(\frac{Z_{n-[nt]}}{g(n)n^H}\frac{Z_{n-[ns]}}{g(n)n^H}\right) = \frac{\mathbf{E}Z^2_{n-[nt]}}{g^2(n)n^{2H}} + \frac{\mathbf{E}Z^2_{n-[ns]}}{g^2(n)n^{2H}} - \frac{\mathbf{E}Z^2_{[nt]-[ns]}}{g^2(n)n^{2H}}$$
$$\to (1-t)^{2H} + (1-s)^{2H} - |t-s|^{2H}, \quad n \to +\infty.$$

Заметим, что правая часть полученного соотношения совпадает с $\mathbf{E}(B_H(1-t)B_H(1-s))$ (см. (6)), стало быть,

$$\mathbf{E}\left(\frac{Z_{n-[nt]}}{g(n)n^H}\frac{Z_{n-[ns]}}{g(n)n^H}\right) \to \mathbf{E}(B_H(1-t)B_H(1-s)),\ n\to+\infty.$$

Рассмотрим правую часть (31). Определим $\{w_n(\cdot,\cdot)\}$:

$$w_n(t,s) := \mathbf{E}\left(\frac{Z_{n-[nt]}}{g(n)n^H}\frac{Z_{n-[ns]}}{g(n)n^H}\right).$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$w_n^2(t,s) \le \frac{\mathbf{E}Z^2_{n-[nt]}}{g^2(n)n^{2H}}\frac{\mathbf{E}Z^2_{n-[ns]}}{g^2(n)n^{2H}}.$$

Следовательно, учитывая (5) и лемму 3, выводим неравенство:

$$\sup_{n\ge1}\sup_{t,s\in[0,1]}|w_n(t,s)| < +\infty.$$

Мы получаем, что $\{w_n(\cdot,\cdot)\}$ обладает интегрируемой мажорантой. Поэтому

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{E}R_n^2}{n^{2\nu}g^2(n)n^{2H}} &= \int_0^1\int_0^1 \mathbf{E}\left(\frac{Z_{n-[nt]}}{g(n)n^H}\frac{Z_{n-[ns]}}{g(n)n^H}\right) dp_\nu(t)dp_\nu(s)\\ &\to \int_0^1\int_0^1 \mathbf{E}(B_H(1-t)B_H(1-s))\, dp_\nu(t)dp_\nu(s),\ n\to+\infty.\end{aligned}$$

Имея в виду (24), получаем заключение предложения.

Перейдем к случаю $\delta<1$. Из леммы 5 следует, что имеет место сходимость при $n\to\infty$ конечномерных распределений процессов $\frac{Z_{[nt]}}{g(n)n^H}$ к конечномерному распределению $B_H(t)$ (напомним, что $H\in(1/2,1)$, $g^2(n)=c^2b^2(n)H^{-1}(2H-1)^{-1}$). Далее, повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве предложения 3 для случая $\delta<1$, мы получаем заключение предложения. Таким образом, предложение полностью доказано.

Список литературы

1. *Ширяев А. Н. Вероятность.* М.: Наука, 1980.

2. *Аркашов Н.С., Селезнев В.А.* О формировании соотношения нелокальностей в модели аномальной диффузии // *ТМФ.* 2017. Т. 193, № 1. С. 115-132.

3. *Аркашов Н.С.* Об одном методе вероятностно-статистического анализа плотности низкочастотной турбулентной плазмы // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2019. Т. 59, № 3. С. 429-440.

4. *Arkashov N.S. and Seleznev V.A.* On the probabilistic-statistical approach to the analysis of nonlocality parameters of plasma density // *Comput. Math. Math. Phys.* 2024. V. 64, N 3. P. 440-451.

5. *Metzler R., Klafter J.* The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // *Phys. Rep.* 2000. V. 339, N 1. P. 1-77.

6. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины.* М.: Наука, 1965.

7. *Taqqu M.S.* Weak convergence to fractional brownian motion and to the rosenblatt process // *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete.* 1975. V. 31, N 4. P. 287-302.

8. *Пригарин С. М. Методы численного моделирования случайных процессов и полей.* Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2005.

9. *Prigarin S. M., Ogorodnikov V. A. Numerical Modelling of Random Processes and Fields: Algorithms and Applications.* Utrecht: VSP, 1996.

10. *Arkashov N.S.* On the modeling of stationary sequences using the inverse distribution function // *Сиб. электрон. матем. изв.* 2022. Т. 19, № 2. С. 502-516.

11. *Сенета Е. Правильно меняющиеся функции.* М.: Наука, 1985.

12. *Колмогоров А.Н.* Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве // *Докл. АН СССР.* 1940. Т. 26, № 2. С. 115-118.

13. *Mandelbrot B., Van Ness J.* Fractional Brownian motions, fractional noise and applications // *SIAM Rev.* 1968. V. 10, N 4. P. 422-437.

14. *Arkashov N.S., Seleznev V.A.* On heterogeneous diffusion processes and the formation of spatial-temporal nonlocality // *Chaos.* 2023. V. 33, N 7. P. 073145.

15. *Cherstvy A.G., Chechkin A.V., Metzler R.* Anomalous diffusion and ergodicity breaking in heterogeneous diffusion // *New J. Phys.* 2013. V. 15, N 8. P. 083039.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 2, С. 5-25
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 2, pp. 5-25

16. *Cherstvy A.G., Metzler R.* Nonergodicity, fluctuations, and criticality in heterogeneous diffusion processes // *Phys. Rev. E.* 2014. V. 90, N 1. P. 012134.

17. *Wang W., Cherstvy A.G., Liu X., and Metzler R.* Anomalous diffusion and nonergodicity for heterogeneous diffusion processes with fractional Gaussian noise // *Phys. Rev. E.* 2020. V. 102, N 1. P. 012146.

18. *Нигматуллин Р.Р.* Дробный интеграл и его физическая интерпретация // *ТМФ.* 1992. Т. 90, № 3. С. 354-368.

19. *Олемской А.И., Флат А.Я.* Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды // *УФН.* 1993. Т. 163, № 12. С. 1-50.

20. *Боровков А. А., Могульский А. А., Саханенко А. И. Предельные теоремы для случайных процессов. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.* Т. 82. М.: ВИНИТИ, 1995.

21. *Аркашов Н.С.* Принцип инвариантности в форме Донскера для процессов частных сумм скользящих средних конечного порядка. *Сиб. электрон. матем. изв.* 2019. Т. 16. С. 1276-1288.

22. *Arkashov N.S.* On the model of random walk with multiple memory structure // *Physica A: Stat. Mech. Appl.* 2022. V. 603. P. 127795.

23. *Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер.* М.: Наука, 1977.

References

1. *Shiryaev A. N. Probability.* M.: Nauka, 1980.

2. *Arkashov N.S., Seleznev V.A.* Formation of a relation of nonlocalities in the anomalous diffusion model // *Teor. Mat. Fiz.* 2017. V. 193, № 1. P. 115-132.

3. *Arkashov N.S.* On a Method for the Probability and Statistical Analysis of the Density of Low Frequency Turbulent Plasma // *Zh. Vych. Mat. Mat. Fiz.* 2019. V. 59, № 3. P. 429-440.

4. *Arkashov N.S. and Seleznev V.A.* On the probabilistic-statistical approach to the analysis of nonlocality parameters of plasma density // *Comput. Math. Math. Phys.* 2024. V. 64, N 3. P. 440-451.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 2, С. 5-25
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 2, pp. 5-25

5. *Metzler R., Klafter J.* The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // *Phys. Rep.* 2000. V. 339, N 1. P. 1-77.

6. *Ibragimov I. A., Linnik Yu. V. Independent and Stationarily Connected Variables.* M.: Nauka, 1965.

7. *Taqqu M.S.* Weak convergence to fractional brownian motion and to the rosenblatt process // *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete.* 1975. V. 31, N 4. P. 287-302.

8. *Prigarin S. M. Numerical Modeling of Random Processes and Fields.* Novosibirsk: Inst. of Comp. Math. and Math. Geoph., 2005.

9. *Prigarin S. M., Ogorodnikov V. A. Numerical Modelling of Random Processes and Fields: Algorithms and Applications.* Utrecht: VSP, 1996.

10. *Arkashov N.S.* On the modeling of stationary sequences using the inverse distribution function // *Sib. Electron. Mat. Izv.* 2022. V. 19, № 2. P. 502-516.

11. *Seneta E. Regularly Varying Function.* M.: Nauka, 1985.

12. *Kolmogorov A.N.* The Wiener spiral and some other interesting curves in Hilbert space // *DAN SSSR.* 1940. V. 26, № 2. P. 115-118.

13. *Mandelbrot B., Van Ness J.* Fractional Brownian motions, fractional noise and applications // *SIAM Rev.* 1968. V. 10, N 4. P. 422-437.

14. *Arkashov N.S., Seleznev V.A.* On heterogeneous diffusion processes and the formation of spatial-temporal nonlocality // *Chaos.* 2023. V. 33, N 7. P. 073145.

15. *Cherstvy A.G., Chechkin A.V., Metzler R.* Anomalous diffusion and ergodicity breaking in heterogeneous diffusion // *New J. Phys.* 2013. V. 15, N 8. P. 083039.

16. *Cherstvy A.G., Metzler R.* Nonergodicity, fluctuations, and criticality in heterogeneous diffusion processes // *Phys. Rev. E.* 2014. V. 90, N 1. P. 012134.

17. *Wang W., Cherstvy A.G., Liu X., and Metzler R.* Anomalous diffusion and nonergodicity for heterogeneous diffusion processes with fractional Gaussian noise // *Phys. Rev. E.* 2020. V. 102, N 1. P. 012146.

18. *Nigmatullin R.R.* Fractional integral and its physical interpretation // *Teor. Mat. Fiz.* 1992. V. 90, № 3. P. 354-368.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 2, С. 5-25
Mat. Trudy, 2024, vol. 27, no. 2, pp. 5-25

19. *Olemskoi A.I., Flat A.Ya.* Application of fractals in condensed-matter physics // *Usp. Fiz. Nauk.* 1993. V. 163, № 12. P. 1-50.

20. *Borovkov A. A., Mogulskii A. A., Sakhanenko A. I. Limit theorems for random processes. The results of science and technology. Modern problems of mathematics. Fundamental directions.* V. 82. M.: VINITI, 1995.

21. *Arkashov N.S.* The principle of invariance in the Donsker form to the partial sum processes of finite order moving averages. *Sib. Electron. Mat. Izv.* 2019. V. 16. P. 1276-1288.

22. *Arkashov N.S.* On the model of random walk with multiple memory structure // *Physica A: Stat. Mech. Appl.* 2022. V. 603. P. 127795.

23. *Billingsley P. Convergence of Probability Measures.* M.: Nauka, 1977.

Информация об авторе

Николай Сергеевич Аркашов, Доктор физико-математических наук, доцент

SPIN 4337-6140 AuthorID: 140684

Scopus Author ID 6504506126

Author Information

Nikolay S. Arkashov, Doctor of Mathematics, Associate Professor

SPIN 4337-6140 AuthorID: 140684

Scopus Author ID 6504506126

Статья поступила в редакцию 16.05.2024;
одобрена после рецензирования 10.06.24; принята к публикации 13.06.2024

The article was submitted 16.05.2024;
approved after reviewing 10.06.24; accepted for publication 13.06.2024